



建筑结构

Building Structure

ISSN 1002-848X,CN 11-2833/TU

## 《建筑结构》网络首发论文

题目： 基于图解静力法的桁架优化程序开发及应用  
作者： 陈学伟，林哲，林生逸，辛展文  
网络首发日期： 2021-09-02  
引用格式： 陈学伟，林哲，林生逸，辛展文. 基于图解静力法的桁架优化程序开发及应用. 建筑结构.  
<https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2833.TU.20210901.1734.002.html>



**网络首发：**在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

**出版确认：**纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

# 基于图解静力法的桁架优化程序开发及应用

陈学伟<sup>1</sup>, 林哲<sup>1</sup>, 林生逸<sup>1</sup>, 辛展文<sup>2</sup>

(1 WSP 科进香港有限公司, 香港 999077; 2 拉瓦尔大学, 魁北克市 G1V0A6)

[摘要] 介绍了图解静力学方法和绘制桁架轴力图的方法, 基于面向对象方法编写绘制桁架结构轴力线图的优化程序, 为了得到稳定的轴力图, 采用基于杆系有限元方法先计算轴力, 再通过拓扑关系绘制轴力图。在计算过程中计算并实时显示虚功代表值, 有利于工程师通过调整桁架形状实时进行找形优化。结合算例描述基于图解静力学方法对桁架进行结构优化的计算过程。最后通过一个工程算例展示基于图解静力学方法对桁架结构的优化的有效性。

[关键词] 钢桁架结构; 图解静力法; 结构优化; 优化程序

中图分类号: TU311.1

文献标识码: A

## Development and application of a truss structure optimization program based on graphic statics

CHEN Xuewei<sup>1</sup>, LIN Zhe<sup>1</sup>, LIN Shengyi<sup>1</sup>, XIN Zhanwen<sup>2</sup>

(1 WSP Hong Kong, Ltd., Hong Kong 999077, China; 2 University Laval, Quebec City G1V0A6, Canada)

**Abstract:** Graphic statics and a method of drawing axial force diagram of truss was introduced; develops an optimization program to draw axial force diagram of truss structure based on an object-oriented method. To obtain stable axial force diagram, axial force is calculated firstly using finite element method based on bar system, and draw axial force diagram through topological relations. Virtual work representative value is calculated and displayed in real time in program calculation, which allows engineers to optimize the truss shape in real time. A calculation example is shown to demonstrate the calculation procedure of truss structure optimization based on graphic statics. Also, an analysis of engineering example exhibits the effectiveness of truss structure optimization based on graphic statics.

**Keywords:** steel truss structure; graphic statics; structure optimization; optimization program

## 0 引言

图解静力学作为结构力学早期主要的手算方法在很早之前就得到广泛应用。卡尔库曼发表著作《图解静力学》<sup>[1]</sup>详细阐述了图解静力学相关理论。现代结构力学计算基本上依靠基于有限元理论的计算机程序实现, 图解静力学作为求解内力的计算方法并不具备优势, 但最近的研究及工程应用表明, 图解静力学方法在钢桁架结构或高层结构<sup>[2-3]</sup>, 框架结构<sup>[4-5]</sup>, 结构材料<sup>[6]</sup>, 铰接支撑结构<sup>[7]</sup>的找形优化设计当中得到较好的应用, 对于建筑及结构的找形分析提供有价值的指导<sup>[8]</sup>。图解静力学已经被应用在一些结构设计工程实例中<sup>[9]</sup>。目前被广泛使用的结构分析程序如ETABS, YJK等并不具备该计算功能。本文通过自编程序实现该部分功能, 并通过二次开发可导入ETABS/SAP2000进行结构后续分析。

## 1 图解静力学理论方法

由三角形组成的桁架结构体系, 构件的轴力基本上可以由构件之间的几何关系求得, 其轴力矢量的和为零, 这是桁架图解静力学的基本解题思路。以图 1 的桁架结构为例, 首先把桁架划分为多个三角形面域, 然后采用外力与支座反力作为力边界条件, 把桁架刚片划为了 A~E 的内力分隔区, 最终根据节点的力平衡条件, 把桁架的立面图转化为轴力

线图, 如图 2 所示。如空腹桁架结构体系, 由四边形构成并不具备三角形面域, 也可以通过增加对角线的方法划分三角形面域, 划分后产生的三角形的桁架的轴力图也能代表空腹桁架的受力情况<sup>[10]</sup>。

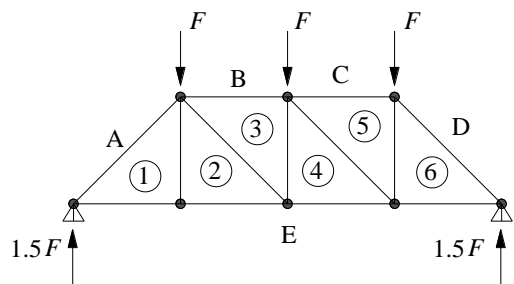


图1 桁架立面图与三角形编号

图 2 中的关键点①~⑥则代表桁架立面图 1 中的三角形①~⑥, 这些点称为三角形代表点, 点与点的连线内力为 2 个相邻三角形共边的杆件的轴力矢量, 线长度代表轴力值, 方向代表轴力的矢量方向。基于每个三角形代表点, 可作该三角形面域的杆件的轴力矢量, 得到最终的轴力线求解图, 如图 2 所示。最后形成封闭的矢量环。整个过程就是采用图解静力学求解全部桁架构件轴力的求解过程。

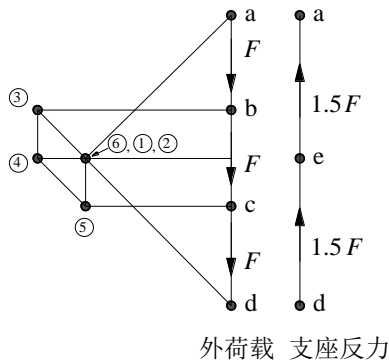


图2 图解静力法得到的轴力图

桁架的轴力线求解图对桁架结构进行找形优化具有良好的指导意义，目前商用结构分析程序缺少该部分功能，因此本文通过编程实现绘制轴力图绘制并计算桁架虚功总代表值，用于评估每一步找形优化的效果。

基于图解法的桁架优化方法：通过对桁架节点的移动位置进行找形，使桁架的总虚功达到较小值，达到结构优化的目标，找形优化的方法分以下三种：1) 改变桁架腹杆的方向，达到中心分布型；2) 修改上弦与下弦的曲线形状，如形成鱼腹形桁架；3) 改变桁架区格的疏密情况。通过程序按照图3的方法，即可得到较优化的桁架体系。在这个过程中，图解法的轴力图帮助工程师在桁架找形过程中得到每步调整桁架节点的策略。

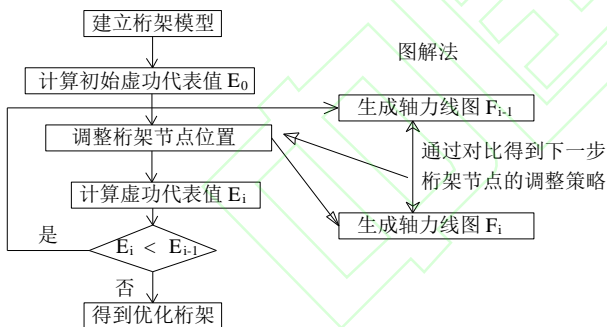


图3 基于图解法找形的方法流程图

## 2 图解静力学的轴力图绘制程序开发

通过结合虚功原理，移动节点对桁架进行找形，节点移动方案具备较多的随机性，为了较好地掌握实现桁架找形规律，可借助图解静力法的轴力图。本文通过编程实现桁架内力分析、绘制轴力图及计算虚功代表值同步进行，让工程师可借助轴力图实现桁架找形。图解静力学方法的轴力图的程序基于构件的几何关系直接求解<sup>[10-11]</sup>，对于小规模桁架，通过图解静力法可方便得出桁架内力，但对于节点较多且同一节点相接构件较多的情况，容易出现判断出错且循环次数较多的情况<sup>[12]</sup>。为了准

备并高效得到轴力图，本文采用的方法是基于杆系有限元方法来直接生成轴力图。主要的编程采用 Delphi 程序基于面向对象方法进行编写<sup>[13]</sup>，具体流程如图4所示。

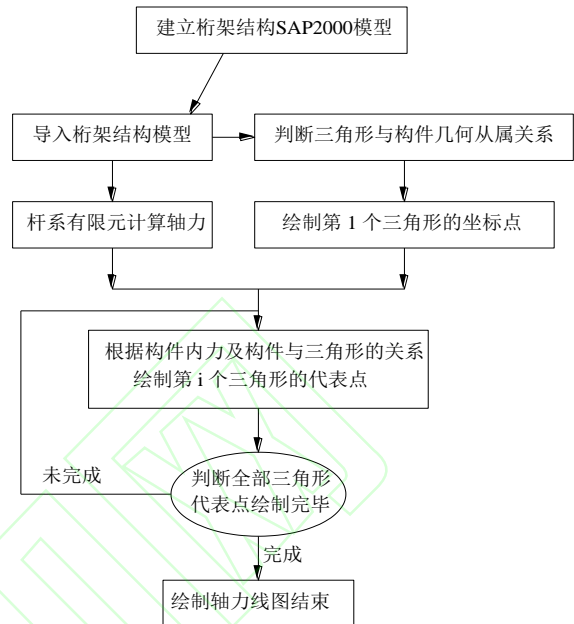


图4 图解静力法的轴力图绘制程序流程图

桁架结构模型是通过 ETABS 或 SAP2000 进行建模，再把建好的模型导入自编程序当中，程序首先进行杆系有限元的结构分析，通过计算得到杆件的轴力，基于轴力结果，计算得到全部三角形代表点的坐标，从代表点延展相关杆件轴力矢量得到整个轴力图。

以图1为例，桁架的杆件编号如图5所示。三角形坐标点以①作为初始点，首先三角形①与②共边的构件为竖杆(8)，由于竖杆的轴力为0，所以①与②共点，②与③共线的为斜杆(9)，通过(9)的轴力矢量得到③代表点坐标，以此类推，三角形代表点。求解顺序为①→⑥，如图6所示。得到全部三角形代表点后延展三角形三边杆件的轴力矢量，得到轴力图。桁架立面杆件轴力与力线图轴力矢量的对应关系，如图7所示。

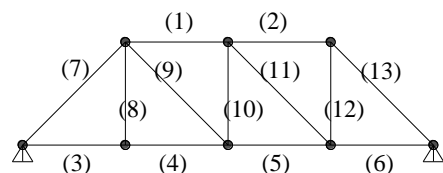


图5 桁架结构的杆件编号

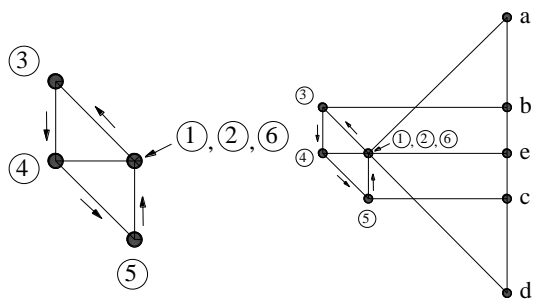


图6 桁架结构三角形代表点的求解顺序

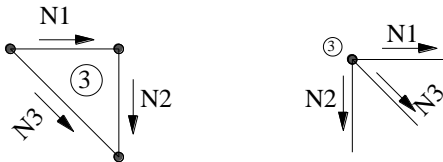


图7 桁架三角形与周边杆件轴力与轴力图对应关系

程序界面如图 8 所示，左侧图为图解静力学的轴力图，右图为桁架立面图。程序可以对全部桁架节点进行偏移，可实时更新得到内力求解图，并采用以下公式<sup>[10]</sup>计算实时得到桁架的虚功代表值，通过虚功代表值的变化趋势评估节点偏移前后桁架是否得到优化，最终目标是使结构的虚功代表值达到最小值。

$$Energy = \sum |P_i| \cdot L_i$$

式中： $P_i$ 为每个杆件的轴力值， $L_i$ 为杆件的长度。

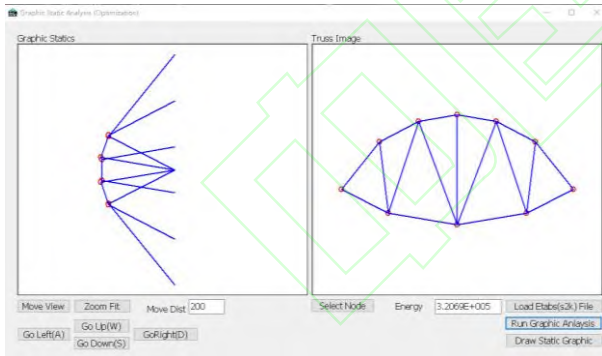


图8 图解静力学优化程序的界面图

### 3 程序验证与算例分析

以图 9 的桁架结构为例介绍采用图解静力学程序进行桁架优化的过程。桁架跨度为 18m，桁架高度为 3m，两端支座为铰支座，所有杆件采用圆钢管 200×20，总用钢量约为 7.32t。采用程序对桁架进行找形分析，分析得到轴力图与桁架形状如表 1 所示。4 个模型对应的虚功代表值如表 2 所示，通过虚功代表值表示形状 1 变化到形状 4，体系的性能提高，总虚功变小。

从轴力图分析可知，原结构的主要轴力线相互平行，线长度的绝对值之和代表虚功，主要力线相

互平行代表线长度总和较大，虚功较大。要减少总虚功的优化方法是尽量压缩力线图的高度，最终的优化结果为形状 4，主要轴力线被压缩并呈现放射线的形状，代表总虚功减小。经 SAP2000 的分析可得，在同等用钢量的前提下，形状 1 的跨中竖向位移为 6.247mm，形状 4 的跨中竖向位移为 2.930mm，形状 4 的桁架在同等用钢量的前提下具备更好的结构刚度。

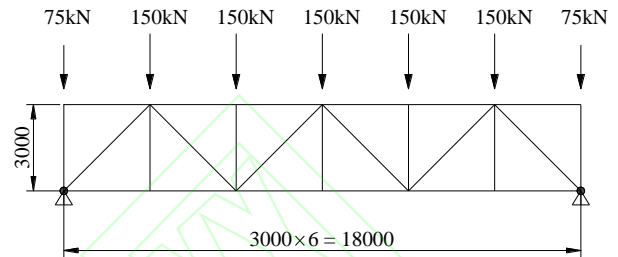


图9 算例桁架结构简图

轴力图与桁架形状

表 1

编号	桁架形状	轴力图
1		
2		
3		
4		

不同桁架形状的虚功代表值

表 2

桁架形状	虚功代表值	相对值
1	$1.9050 \times 10^7$	1.000
2	$1.4675 \times 10^7$	0.770
3	$1.3324 \times 10^7$	0.699
4	$1.2532 \times 10^7$	0.658

### 4 工程应用分析

现代的高层办公楼建筑的塔冠越来越多采用钢桁架构件，用于支承玻璃幕墙抵抗风荷载。在风荷载较大的地区，钢桁架的截面尺寸往往由风荷载作用下的变形控制。本文以一钢桁架的设计为例，如图 10 所示，桁架的高度为 24m，桁架深度为 1.5m，在 12m 高度处有侧向支撑连接核心筒，通过图解静力学优化桁架结构，使桁架结构在同等用钢量的情况下，顶部变形最小，满足 1/500 的要求。

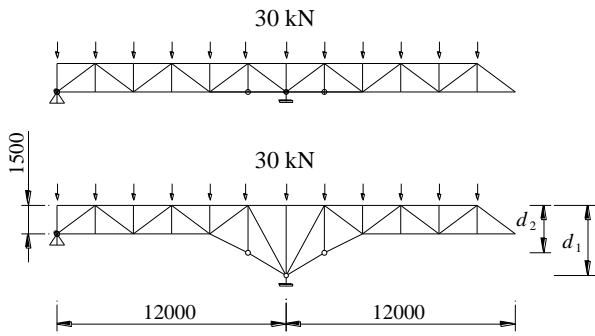
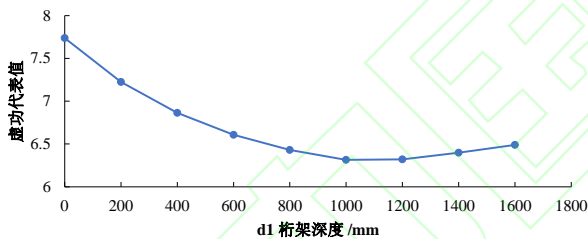
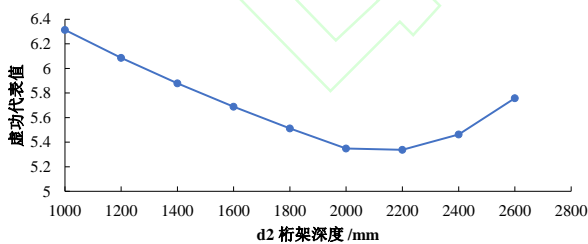


图 10 钢桁架立面图与变深度部位

采用本文编制的图解静力法对桁架进行优化，控制变截面处桁架的深度尺寸值  $d_1$  与  $d_2$ ，通过程序分析可知，第一阶段：3 个节点的深度  $d_2$  达到 1m 时，虚功代表值达到较小值，如图 11(a)所示，第二阶段：通过偏移跨中支座节点，节点深度  $d_1$  达到 2.2m 时，虚功代表值达到最小值，如图 11(b)所示，通过该方法最终确定塔玻璃幕墙的形状（图 14(b)）。从轴力图 13 分析可知，第一阶段调整跨中 3 个节点时，压缩轴力线空间达到一定程度，第二阶段调整调中节点，基本上把大部分的三角形代表点调整至同一直线，桁架的虚功达到最小值，代表采用该形状下的钢桁架在同等用钢量的情况下刚度最大。

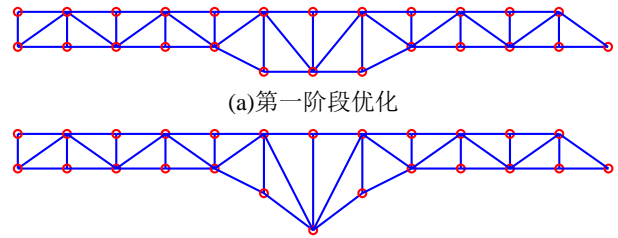


(a) 第一阶段优化

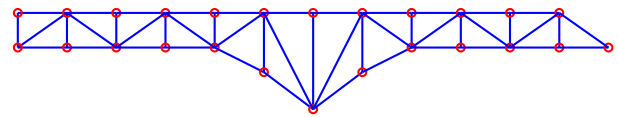


(b)第二阶段优化

图 11 虚功代表值与跨中节点深度的关系

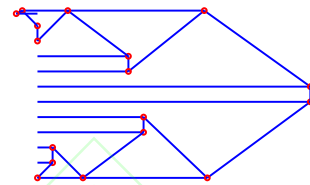


(a)第一阶段优化

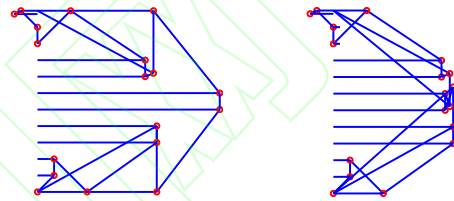


(b)第二阶段优化

图 12 钢桁架结构找形图



(a) 原桁架结构



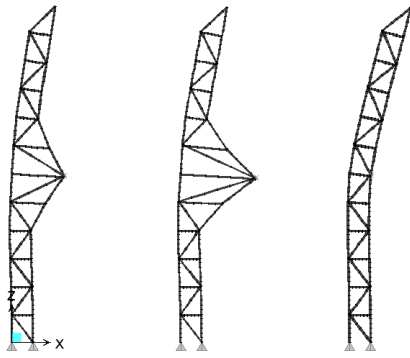
(b)第一阶段优化

(c)第二阶段优化

图 13 钢桁架结构的轴力图

通过 SAP2000 对不同变深度的桁架方案进行建模分析，如图 14 所示，方案 1 为原方案钢桁架 ( $\Phi 176 \times 8$ )，方案 2 为变深度桁架 ( $\Phi 150 \times 8$ )，最大深度为 5.3m，方案 3 为图解静力法虚功代表值最小的方案，最大深度为 3.7m ( $\Phi 160 \times 8$ )。3 个方案的用钢量相等。经 ETABS 分析得到 3 个方案的顶部变形值为 71.20，44.71mm 与 39.20mm。方案 3 达在风荷载作用下的变形最小，方案 2 表明桁架的局部加深并不是越深越好，它存在一个最优解的取值。最后采用方案 3 得到的塔冠的建筑三维效果如图 15 所示。

经过分析表明，桁架图解静力法对桁架的优化效率高且对结构工程师较为直观，配合虚功代表值，结构工程师可以找出同等材料用量下的刚度较优方案。该方法适用于单一工况或简单荷载组合，如恒载与活载组合下的结构优化，对于地震荷载并不适用。



(a)方案3 (b)方案2 (c)方案1

图14 钢桁架结构的变形图

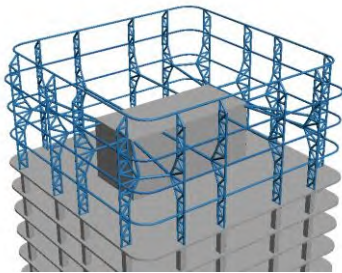


图15 方案3的塔冠建筑三维效果图

## 5 结论

由于高强钢材的应用推广，越来越多的桁架结构由原来的承载力控制变成刚度控制，如转换桁架及抗风桁架等，提高钢桁架的结构效能变得越来越重要，其中图解静力学方法、虚功原理及拓扑优化等优化方法被广泛使用。本文通过编程的方法将图解静力学应用于工程当中，基于杆系有限元法编写绘制轴力图程序，其中增加实时计算虚功代表值的功能，能让工程师更好地进行桁架结构的找形分析，通过二次开发将优化后的形状导入 SAP2000 等结构程序进行后续分析。最后通过工程算例展示该程序在抗风桁架的找形分析中的应用。

### 参考文献

- [1] ZILLICH K, STIEGLER F. Graphische statik[M]. Zurich: Verlag Von Meyer & Zeller, 1866.
- [2] BOJCZUK D, MRÓZ Z. Optimal topology and configuration design of trusses with stress and buckling constraints [J]. Structural Optimization, 1999, 17(1): 25-35.
- [3] MAZUREK A. Geometrical aspects of optimum truss like structures for three-force problem [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 45(1): 21-32.
- [4] BAKER W, BEGHINI L, MAZUREK A. Maxwell's reciprocal diagrams and discrete Michell frames [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 48(2): 267-277.
- [5] STROMBERG L, BEGHINI A, BAKER W, et al. Topology optimization for braced frames: combining continuum and beam/column elements [J]. Engineering Structures, 2012, 37: 106-124.
- [6] BENDSØE M, SIGMUND O. Material interpolation schemes in topology optimization [J]. Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv), 1999, 69(9-10): 635-654.
- [7] TYAS A, PICHUGIN A, GILBERT M. Optimum structure to carry a uniform load between pinned supports: exact analytical solution [J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2010, 467(2128): 1101-1120.
- [8] 曾浩杰. 图解静力学在建筑形态创作中的应用研究[D]. 重庆: 西南交通大学, 2019.
- [9] ZASTAVNI D. The structural design of Maillart's Chiasso Shed (1924): a graphic procedure [J]. IABSE Symposium Report, 2008, 18(3):247-252.
- [10] BEGHINI L, CARRION J, BEGHINI A, et al. Structural optimization using graphic statics [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 49(3), 351-366.
- [11] 赵洁, 马思嘉, 乔文涛, 等. 基于图解静力学的平面桁架形态设计方法研究[J].建筑科学, 2019, 35(7):53-58.
- [12] ZHOU M, ROZVANY G. The COC algorithm, part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, 89(1-3): 309-336.