文章编号: 1000-4750(2011)Sup.I-0005-07

三种非线性梁柱单元的研究及单元开发

*陈学伟 ^{1,2},韩小雷 ^{1,2},孙思为 ¹

(1. 华南理工大学土木与交通学院,广州 510640; 2. 华南理工大学亚热带建筑科学国家重点实验室,广州 510640)

摘 要: 罕遇地震作用下混凝土梁柱构件易进入塑性阶段而发生弹塑性损伤,正确地模拟结构进入非线性状态后的力学行为对评价结构的抗震安全性具有重要的意义。通过面向对象语言编制了基于宏观单元的结构弹塑性分析软件平台 MESAP,增加了三种非线性梁柱单元:基于刚度法纤维单元、基于柔度法纤维单元及基于柔度法的塑性铰单元。通过算例分析三种非线性梁柱单元之间的差异。基于柔度法塑性铰单元的柔度矩阵积分方法可分为四种,通过算例讨论四种积分方法的差异。算例分析结果表明基于柔度法的塑性铰单元是一种精度高具计算成本低的宏观单元。Gauss-Radau 积分法要求进行塑性计算的积分点只有两个,该积分法计算效率较高且精度良好,适用于整体结构的非线性分析之中,具有实际工程应用意义。

关键词:纤维单元;塑性铰单元;框架柱;低周往复荷载试验;非线性分析

中图分类号: TU37; TU375 文献标识码: A

RESEARCH AND DEVELOPMENT OF THREE NONLINEAR BEAM-COLUMN ELEMENTS

*CHEN Xue-wei^{1,2}, HAN Xiao-lei^{1,2}, SUN Si-wei¹

(1. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;

2. State Key Laboratory of Subtropical Architecture Science, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: Since the elastoplastic damages occur in concrete structures and components in plastic stage under a severe earthquake, precise prediction of nonlinear behavior of structures in the earthquake is important to assess the seismic safety of the structures. A structural elastoplastic analysis program MEASP which bases on macro elements is compiled with object oriented language and three kinds of nonlinear beam-column elements are implemented in MESAP: stiffness-based fiber element, flexibility-based fiber element and flexibility-based plastic hinge element. Differences between the elements are compared by case study. Four kinds of integration methods for obtaining the flexibility matrix of the plastic hinge element are studied. The results show that a flexibility-based plastic hinge element is an accurate macro element with low computation cost. Only two integration points are required by the Gauss-Radau integration method handling a nonlinear analysis. It is accuracy and its computational efficiency is applicable in the entire structure nonlinear analysis and practical in engineering.

Key words: fiber element; plastic hinge element; frame column; reversed cyclic loading test; nonlinear analysis

随着我国经济的发展,对建筑结构的抗震性能 评估有了更高的要求。常规结构线弹性分析方法已 经很难满足结构抗震分析的要求。因此如何正确的对结构进行非线性分析,准确的预测结构在罕遇地

收稿日期: 2010-10-21; 修改日期: 2011-02-21

基金项目: 亚热带建筑科学国家重点实验室自主研究项目(2009ZA04)

作者简介: *陈学伟(1983-), 男, 广东人, 博士生, 主要从事高层建筑结构抗震分析研究(E-mail: dinochen1983@yahoo.com.cn);

韩小雷(1964-),男,江苏人,教授,博士,主要从事高层建筑结构抗震分析研究(E-mail: xlhan@scut.edu.cn);

孙思为(1987-), 女, 江西人, 硕士生, 主要从事高层建筑结构抗震分析研究(E-mail: ncssw87918@163.com).

震作用下的非线性行为,成为结构性能设计中的重 点问题。结构非线性分析模型可分为微观模型和宏 观模型两种,微观模型计算量大、试验分析校正困 难等问题,所以很难用于模拟大型整体结构。与微 观模型相对应的是宏观模型,宏观单元具有自由度 少、计算量小等优点。塑性铰模型是常用的宏观模 型之一,其优点是将复杂的构件弹塑性行为采用为 简单的截面力-位移关系曲线表达,也可以采用纤维 截面进行表达。基于柔度法的塑性铰单元计算收敛 速度快,适用于大型结构分析。如 OpenSEES^[1]与 Perform-3D^[2]均加入了基于柔度法的塑性铰梁柱 单元。

1 基于柔度法的塑性铰单元理论

1.1 基于刚度法的梁柱单元

基于刚度法的梁柱单元提出较早,Mari 与 Scordelis^[3]提出了基于刚度的梁柱单元模型,单元 的刚体位移规定如图1所示。



Fig.1 Definition of rigid mode vector

该模型把单元划分为若干个积分区段,积分点 处截面的位移通过3次Hermit多项式插值得到,对 插值函数进行求导可以得到截面处对应的截面变 形,如式(1)-式(2)所示。

$$d(x) = \begin{cases} v''(x) \\ u'(x) \end{cases} = \overline{a}(x)\overline{q} \tag{1}$$

$$\overline{a}(x) =$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1''(x) & \phi_2''(x) & 0 & \phi_3''(x) & \phi_4''(x) & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1'(x) & 0 & 0 & \psi_2'(x) \end{bmatrix} (2)$$

通过截面变形与截面的力-位移关系得到截面 抗力向量与切线刚度矩阵。截面的刚度矩阵沿长度 进行积分得到单元刚度矩阵,如下式所示:

$$\overline{\mathbf{K}} = \int_{0}^{L} \overline{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}}(x)k(x)\overline{a}(x)\mathrm{d}x \qquad (3)$$

截面的抗力向量沿长度进行积分得到单元抗 力向量,如下式所示:

$$\overline{\boldsymbol{Q}}_{R} = \int_{0}^{L} \overline{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}(x) D_{R}(x) \mathrm{d}x \tag{4}$$

基于刚度法的单元主要缺点是 3 次的 Hermit

插值函数不能很好地描述端部屈服后单元的曲率 分布,而且单元层次没有迭代计算因此收敛速度 慢。为减少 Hermit 函数造成的误差,采用多细分单 元的方法进行建模,可以得到较好的效果。

1.2 基于柔度法的梁柱单元

基于柔度法的梁柱单元是由 Filippou^[4]提出了 基于柔度的梁柱单元模型,这一模型同样把单元划 分为若干个积分区段,积分点处的截面力通过线性 插值得到,线性插值函数如下式所示:

$$\boldsymbol{b}(x) = \begin{bmatrix} (x/L-1) & (x/L) & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(5)

通过插值函数把单元力转化为截面,根据上一 迭代步截面柔度矩阵,将截面力变成截面变形,通 过截面的力与变形关系得到截面的抗力与切线刚 度。截面的柔度矩阵沿长度进行积分得到单元柔度 矩阵,如下式所示:

$$\overline{F} = \int_{0}^{L} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(x) \boldsymbol{f}(x) \boldsymbol{b}(x) \mathrm{d}x \qquad (6)$$

截面的不平衡力向量转化为残余变形,并沿长 度进行积分得到单元下一步迭代的变形增量,如 下式所示:

$$\Delta q^{j+1} = -s^j = \int_0^L \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{r}(x)\mathrm{d}x \tag{7}$$

当截面抗力与截面力不相等时,将截面不平衡 力转化为截面残余变形重新赋给单元进行迭代计 算直至截面不平衡力为零,残余变形的计算如式所 示。这过程称为单元内部迭代,由于对单元进行内 部迭代计算,使整体结构计算时迭代收敛速度提 高。截面的力-变形关系可以通过弯矩-曲率关系表 述,如式(8)所示。

也可以采用纤维截面,纤维截面的截面刚度矩 阵如式(9)所示。

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{v}^{n}) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\boldsymbol{A} \end{bmatrix}$$
(8)

$$\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \sum_{i} E_{i} A_{i} y_{i}^{2} & \sum_{i} E_{i} A_{i} y_{i} \\ -\sum_{i}^{n} E_{i} A_{i} y_{i} & \sum_{i}^{n} E_{i} A_{i} \end{bmatrix}$$
(9)

刚度法与柔度法的梁柱单元积分多采用 Gauss-Lobatto 积分方法,将式(6)改写积分为:

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{Np} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(x_i) \boldsymbol{f}(x_i) \boldsymbol{b}(x_i) \boldsymbol{\omega}_i$$
(10)

积分点位置与积分点的权系数如图2所示。



Fig.2 Gauss-Lobatto integration points and weight coefficient

基于柔度法的单元主要优点是在模拟弯曲型 梁柱构件时,可以得到很好的效果且收敛速度快, 但是大量的试验表明梁柱塑性区多发生在端部,其 中部基本处于弹性状态,因此 Scott 与 Fenves^[5]提出 了基于柔度法的塑性铰单元。

1.3 基于柔度法的塑性铰单元

基于柔度法的塑性较单元与基于柔度法的梁 柱单元的计算过程是一样的,同样具有单元内迭代 步骤,不同之处,塑性铰单元的中部积分截面采用 弹性本构,不需要进行求解切线刚度与截面抗力的 步骤,单元内部迭代的收敛标准是只要塑性区截面 收敛即可,这样就提高了求解速度。塑性铰单元的 柔度矩阵求解如下式所示:

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{N_p} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(x_i) \boldsymbol{f}(x_i) \boldsymbol{b}(x_i) \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{f}_{\mathrm{int}}^{e}$$
(11)

其中, **f**^e_{int}为弹性部分的柔度矩阵,其计算公式如式(12)-式(13)所示。

$$\boldsymbol{f}_{\text{int}}^{e} = \int_{L_{pi}}^{L-L_{pj}} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} f_{s} b \mathrm{d} x$$
(12)

$$\boldsymbol{f}_{s} = \begin{bmatrix} 1/EI & 0\\ 0 & 1/EA \end{bmatrix}$$
(13)

文献提出塑性较单元常用四种积分方式,分别为两端端中点积分法,两端边点积分法,两端Gauss-Radau积分法及修正Gauss-Radau积分法,积分法示意图如图3所示。

其中修正 Gauss-Radau 积分法的第 2 个与第 3 个积分点属于弹性部分,虽然是四点积分,但是需 要进行截面分析的只有两个积分点,因此其弹性部 分柔度矩阵应改写为:

$$\boldsymbol{f}_{\text{int}}^{e} = \int_{4L_{pi}}^{L-4L_{pj}} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} f_{s} b dx + (\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} f_{s} b \big|_{x=8/3L_{pi}}) 3L_{pi} + (\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} f_{s} b \big|_{x=L-8/3L_{pi}}) 3L_{pj}$$
(14)

两端 Gauss-Radau 积分法计算成本最高,因为

需要进行四个积分点处的截面分析。



Fig.3 Sketch of integration of plastic hinge element

2 弹塑性软件 MESAP 编制及单元 开发

基于宏观模型的结构非线性分析方法在国内 外已经应用很多,如 OpenSEES、PERFORM-3D。 笔者为了更好的研究宏观模型理论及程序实现方 法,通过面向对象语言 Delphi 开发了基于宏观单元 理论的弹塑性分析软件 MESAP(Macro Element Structural Analysis Program)。软件是基于面向对象 技术来编写的,如图 4 所示。



图 4 MESAP 类之间的关系图

Fig.4 The relationship diagram between classes of MESAP 可不断扩展单元库与材料本构库,配有图形化

的前后处理,图形界面如图5所示。



笔者根据上述理论,将三种梁柱单元——基于 柔度法纤维单元、基于刚度法纤维单元及基于柔度 法的塑性铰单元加入 MESAP 的单元库,基于柔度 法的单元内迭代过程图如图 6 所示。MESAP 还具 有两种剪力墙单元模型:三弹簧模型(TVLEM)^[6]与 多竖向弹簧模型(MVLEM)^[7-8],MESAP 的材料库 具有多种材料模型,包括 Kent-Park^[9]混凝土本构模 型、Pinto^[10]钢筋本构模型,其滞回曲线与 OpenSEES 的对比如图 7 所示,以及本文用来描述弯矩曲率关 系的修正 Clough^[11]模型等。







(a) Kent-Park 混凝土本构

Table 1



3 算例分析

3.1 柱低周往复荷载试验

Tanaka与Park^[12](1990年)为研究不同配箍形式 及不同轴压比下矩形柱的抗震性能,对8组矩形柱 进行低周往复荷载试验分析,本文采用 MESAP 软 件对该试验进行数值分析,研究基于柔度法塑性铰 单元的适用性。本文选取与中国规范的配箍形式接 近的柱子:试件1、试件5及试件7。3个试件的截 面配筋图如图8所示。试件的材料、箍筋及轴压比 如表1所示。试件底端固定,上端自由。试验加载 制度为先进行竖向加载,加载至设定的轴力以后进 行力控制加载,随后进行位移加载,每级位移约为 20mm、40mm、60mm、80mm。





| Material paran | neter, stirrup | and axial | compressive | ratio o | of specimen |
|----------------|----------------|-----------|-------------|---------|-------------|
|----------------|----------------|-----------|-------------|---------|-------------|

| 试件 — | 混凝土 | 钢筋(直径 20mm) | | 箍筋(直径 12mm) | | 统效问明/***** | 柿正せ |
|------|----------|-------------|----------|-------------|----------|------------|-----|
| | 抗压强度/MPa | 屈服强度/MPa | 极限强度/MPa | 屈服强度/MPa | 极限强度/MPa | 于他加利可起/mm | 湘広し |
| #1 | 25.6 | 474 | 721 | 333 | 481 | 80 | 0.2 |
| #5 | 32 | 511 | 675 | 325 | 429 | 110 | 0.1 |

3.2 基于截面弯矩-曲率关系的塑性铰模型的分析

以试件 1 为例, 试件 1 高度为 1.8m, 混凝土抗 压强度 f'_{c} =25.6MPa,为考虑箍筋的约束效应,采 用 Mander 公式对约束区的混凝土抗压强度进行计 算,体积配筋率 ρ_{h} =0.84%,约束力 f_{l} =2.51MPa, 得到约束区抗压强度 f'_{cc} =36.23MPa,对应应变 ε_{cc} = 0.0062,根据 Kent-Park 混凝土模型规定,取压碎时 混凝土应变 ε_{20} =0.0165。纵筋的弹性模量取 200000MPa,强化系数取 0.01。采用 XTRACT 程序 对试件 1 进行截面分析,施加竖向力为 819kN,分 析得到弯矩曲率曲线进行二折线简化得到塑性铰骨 架曲线,软化系数 α =0,抗弯刚度 K_{0} =1.86× 10¹³N·mm²,屈服强度取 M_{y} =260kN·m。塑性铰长度 L_{p} 采用 Paulay 与 Priestley(1992)^[13]提出的经验公式 计算,得到 L_{p} =352mm,如下式:

 $L_p = 0.08L + 0.022 f_v d_b$ (单位制为 N, mm) (15)

采用 MESAP 对试件 1 进行建模, 塑性铰的滞 回模型采用修正 Clough 模型, 塑性铰积分方法采 用修正 Gauss-Radau 法, 卸载刚度退化系数 γ =0.5, 分析结果与试验结果对比如图 10 所示, 表明基于 截面弯矩-曲率关系的塑性铰模型基本能够描述柱 的滞回特性,由于采用二折线简化滞回曲线偏向简 单, 总体耗能情况与卸载路径基本吻合。









图 10 试件 1 滞回分析曲线对比 Fig.10 Comparison of hysteretic curves of specimen 1

3.3 塑性铰积分方法的对比

以试件 1 为例,将塑性铰骨架曲线的软化系数 α 取为 0.03 与-0.03 两种情况。采用 MESAP 对试 件 1 进行单调推覆分析,考察四种不同的塑性铰积 分方法对转化或强化效应的影响。分析结果如图 11 所示,图 11 中#1-#4 分别代表两端中点积分法、 两端边点积分法、两端 Gauss-Radau 积分法及修正 Gauss-Radau 积分法。图 11 表明在强化与软化行为 中两端中点积分法高估了屈服强度,由于假定塑性 铰曲率代表值为塑性区的中点而不是端点,不符合 实际情况,而两端中点积分法使刚度偏小。两端 Gauss-Radau 积分法在强化段比修正 Gauss-Radau 稍高,软化段 非常吻合。综上所述,两端 Guass-Radau 积分法与修正 Guass-Radau 积分法的 精度高,而修正 Guass-Radau 积分法的计算成本 较低。





3.4 基于纤维截面的塑性铰模型的分析

基于截面弯矩-曲率关系的塑性铰模型其滞回 分析的精度与截面本构的曲线相关,截面本构多采 用多折线模型,与试验分析结果较难吻合,而采用 纤维截面的塑性铰可以采用带曲线的混凝土与钢 筋本构,能较好地与试验的滞回曲线吻合。基于弯 矩曲率关系的塑性铰需要在截面分析时考虑恒定 的轴力影响,对于变化轴力情况难以分析,而纤维 截面能够考虑压弯耦合。本文通过 MESAP 对试件 1、试件 5、试件 7 进行纤维截面塑性铰模型的建模, 进行低周往复试验模拟。

试件5与试件7截面与纵筋配置相同,箍筋间 距不同。根据 mander 约束混凝土计算公式, 试件 5: $\rho_h = 0.64\%$, $f_l = 1.80$ MPa, $f_{cc}' = 41.35$ MPa, $\varepsilon_{cc} =$ 0.0049, ε_{20} =0.0146。试件 7: ρ_h =0.78%, f_l = 2.28MPa, f'_{cc} =42.80MPa, ε_{cc} =0.0053, ε_{20} =0.0182. 纤维截面中混凝土采用 Kent-Park 模型本构,钢筋 采用 Pinto 钢筋本构, 塑性铰长度按式(15)计算, 塑 性铰积分方法采用修正 Gauss-Radau 法,纤维单元 积分点取4个,得到塑性铰长度为356mm。为对比 不同的梁柱单元的精度,以试件5为例建立三种梁 柱单元进行对比。试件的分析结果如图 12 所示。 图 12(b)中表明基于刚度法的纤维单元精度差,高估 了承载力,证明了 1.1 所论述的观点。基于柔度法 的纤维单元与塑性较单元都与试验结果基本吻合, 在卸载曲线上塑性铰单元吻合程度较高。采用塑性 较单元对试件1的模拟结果如图13所示,在不调 整任何参数的情况下与试验结果吻合。塑性铰单元 与柔度法纤维单元对试件 7 的模拟结果如图 14 所 示,表明分析结果中提前进入下降段,混凝土本构 计算公式低估了混凝土材料的延性,应提高混凝土 的压碎应变值,将 ε_{20} 改为 0.036 时分析结果如 图 15 所示,调整应变以后,塑性铰模型基本与试 验结果吻合,而且在最后一个加载循环中才出现陡 下降段,与试验情况一致。而纤维单元模型仍过早 出现下降段,与试验结果不吻合。纤维单元的塑性 变形一般发生在端部, 而端部的积分长度由 Gauss-Lobotto 积分点确定, 其长度与实际的塑性铰 长度可能有偏差,而塑性较单元通过经验公式先划 分塑性区段有利于集中在塑性变形截面处计算刚 度退化,这样可以准确地反映整个单元的刚度退化 情况。







图 13 试件 1 滞回曲线图对比





Fig.14 Comparison of hysteretic curves of specimen 7



图 15 调整后试件 7 滞回曲线图对比

Fig.15 Comparison of modified hysteretic curves of specimen 7

4 结论

本文对三种非线性梁柱单元:基于柔度法梁柱 单元、基于刚度法梁柱单元及基于柔度法的塑性铰 单元进行研究,采用面向对象语言开发了弹塑性分 析软件 MESAP,并向软件加入三种梁柱单元。运 用 MESAP 程序对一系列钢筋混凝土柱低周往复试 验进行数值模拟。分析三种梁柱单元的区别,塑性 较单元的积分方法的区别。分析结果对比表明,塑 性铰的四种积分方法中,修正 Gauss-Radau 积分法 速度快且精度高。基于纤维截面的塑性铰模型优于 基于截面弯矩-曲率关系的塑性铰,滞回曲线较饱满 且接近试验结果,不需要进行截面分析,可以考虑 压弯耦合。对试件5进行多种模型分析发现基于刚 度法的纤维单元精度稍差,基于柔度法的纤维单元 与塑性铰较为吻合,表明3次的Hermit 插值函数不 能很好地描述端部截面的变形。最后对试件7的分 析表明塑性铰模型因为先定义了塑性铰长度,集中 在塑性区截面上计算刚度退化,其分析的结果比固 定积分点的纤维单元更加准确。综上所述,基于柔 度法的纤维单元是一种精度高具计算成本低的宏 观单元。该单元需要进行塑性计算的积分点只有两 个,提高了计算效率,在整体结构的非线性分析之 中,具有实际工程应用意义。

参考文献:

 韩小雷,陈学伟,郑宜,彭樵斌. 足尺钢框架振动台试 验及动力弹塑性数值模拟[J]. 地震工程与工程振动, 2008, 28(6): 134-141.
 Han Xiaolei, Chen Xuewei, Jack Cheang, Peng Qiaobin.

Dynamic experiment and numerical simulation of a full scale steel frame [J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2008, 28(6): 134–141. (in Chinese)

- [2] 韩小雷,陈学伟,林生逸.基于纤维模型的超高层钢筋混凝土结构弹塑性时程分析[J].建筑结构,2010,40(2):13-16.
 Han Xiaolei, Chen Xuewei, Lin Shengyi. Inelastic time-history analysis and engineering application super
 - high-rise building structure based on fiber model [J]. Journal of Building Structures, 2010, 40(2): 13-16. (in Chinese)
- [3] Mari A, Scordelis A. Nonlinear geometric material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames [R]. Berkeley: SESM Report 82-12, Department of Civil Engineering, University of California, 1984.
- [4] Filippou F C, Issa A. Nonlinear analysis of reinforced concrete frames under cyclic load reversals [R]. Berkeley: EERC Report 88-12, Earthquake Engineering Research Center, 1988.
- [5] Scott Michael H, Fenves Gregory L. Plastic hinge integration methods for force-based beam-column elements [J]. Journal of Structural Engineering, 2006, 132(2): 244-252.
- [6] Kabeyaawa T. US-Japan cooperative research on R/C full - scale building test, part 5: Discussion of dynamic response system [C]. Proc. 8th of WCEE, 1984.
- [7] 韩小雷,陈学伟,戴金华. 基于 OpenSEES 的剪力墙低 周往复试验的数值分析[J]. 华南理工大学学报自然科 学版, 2008, 36(12): 7-12.
 Han Xiaolei, Chen Xuewei, Dai Jinhua. Numerical analysis for low-cyclic loading test of shear walls based on OpenSEES [J]. Journal of South China University of Technology, 2008, 36(12): 7-12. (in Chinese)
- [8] 韩小雷,陈学伟,吴培烽. OpenSEES 的剪力墙宏观单元的研究[J]. 世界地震工程,2008,24(4):76-81.
 Han Xiaolei, Chen Xuewei, Wu Peifeng. Research on the shear wall macro-element of OpenSEES [J]. Journal of World Earthquake Engineering, 2008, 24(4):76-81. (in Chinese)
- [9] Kent D C, Park R. Flexural members with confined-concrete [J]. Journal of the Structural Division, 1971, 97: 1969–1990.
- [10] Menegotto M, Pinto. P E. Method of analysis of cyclically loaded RC plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under normal force and bending [R]. Lisbon, Portugal: Preliminary Report, IABSE, 1973, 13: 15-22.
- [11] Clough R W, Benuska K L, Wilson E L. Inelastic earthquake response of tall buildings [C]. Proceeding of 3rd World Conference on Earthquake Engineering. Wellington, New Zealand, 1965.
- [12] Tanaka H, Park R. Effect of lateral confining reinforcement on the ductile behavior of reinforced concrete columns [R]. Canterbury, U.K.: Report No 90-2, Department of Civil Engineering. University of Canterbury, 1990.
- [13] Paulay T, Priestley M J N. Seismic design of reinforced concrete and masonry buildings [M]. New York: Wiley, 1992.